模块二 求通项与求和

第 1 节 数列通项的核心求法（★★★）

内容提要

求通项是数列板块的核心问题之一，本节归纳几种常见的求通项的题型.

1．累加法：若数列$\{a_n\}$满足递推公式$a_n-a_{n-1}=f(n)(n\ge 2)$，且$f(n)$能够求和（常见的例如$a_n-a_{n-1}=n$，$a_n-a_{n-1}=2^n$，$a_n-a_{n-1}=\dfrac{1}{n(n+1)}$等），则可用累加法求$\{a_n\}$的通项公式，具体操作步骤如下.

①取$n=2$，3，…，n得到$\begin{cases}a_2-a_1=f(2)\\a_3-a_2=f(3)\\\quad\cdots\cdots\\a_{n-1}-a_{n-2}=f(n-1)\\a_n-a_{n-1}=f(n)\end{cases}$；

②将以上各式累加得$a_n-a_1=f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$，于是$a_n=f(2)+f(3)+\cdots+f(n)+a_1$；

③上面求出的a_n只在$n\ge 2$时成立，所以最后单独验证a_1是否满足该结果.

2．累乘法：若数列$\{a_n\}$满足递推公式$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)(n\ge 2)$，且$f(n)$能求积（常见的例如$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n+1}$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2^n$等），则可用累乘法求$\{a_n\}$的通项公式，具体操作步骤如下.

①将递推公式$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)$从$n=2$开始，一直写到$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)$，得到$\dfrac{a_2}{a_1}=f(2)$，$\dfrac{a_3}{a_2}=f(3)$，$\dfrac{a_4}{a_3}=f(4)$，…，$\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=f(n-1)$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)$；

②将上述$n-1$个式子累乘可得$\dfrac{a_n}{a_1}=f(2)f(3)\cdots f(n)$，于是$a_n=f(2)f(3)\cdots f(n)a_1$；

③上面求出的a_n只在$n\ge 2$时成立，所以最后单独验证a_1是否满足该结果.

3．带提示的构造法：若题干给出数列$\{a_n\}$的递推公式，让我们先证明与a_n有关的某数列为等差数列或等比数列，再求$\{a_n\}$的通项公式. 这类题要证的结论其实是提示了我们该怎样构造新数列，证出结论后，可先求出构造的新数列的通项，再求$\{a_n\}$.

4．待定系数法构造：有的题目只给了递推公式，没有提示如何构造，我们可根据递推公式的结构特征，用待定系数法来构造新的等差或等比数列，求出通项.

5．等价变形：若题干给出的递推公式较复杂，则可对递推公式变形，化简递推公式，或通过变形构造出新数列来求通项.

典型例题

类型Ⅰ：累加法求通项

【例 1】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=n+1$，求$\{a_n\}$的通项公式.

解：（看到$a_{n+1}-a_n=n+1$这样的递推公式，想到用累加法求a_n）

由题意，当 $n\ge 2$ 时，$\begin{cases} a_2-a_1=2 \\ a_3-a_2=3 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n-1}-a_{n-2}=n-1 \\ a_n-a_{n-1}=n \end{cases}$，将以上各式累加可得 $a_n-a_1=2+3+\cdots+n$，

结合 $a_1=1$ 可得 $a_n=a_1+2+3+\cdots+n=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

又 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

【反思】遇到 $a_{n+1}-a_n=f(n)$ 这类递推公式，考虑用累加法求通项.

【变式 1】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，且 $(n+1)a_{n+1}-na_n=2^n$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（把 na_n 看作 b_n，则 $(n+1)a_{n+1}$ 即为 b_{n+1}，故 $b_{n+1}-b_n=2^n$，这就是累加法的适用情形了，可先求 b_n）

设 $b_n=na_n$，则 $b_1=a_1=2$，且 $(n+1)a_{n+1}-na_n=2^n$ 即为 $b_{n+1}-b_n=2^n$，

所以当 $n\ge 2$ 时，$\begin{cases} b_2-b_1=2^1 \\ b_3-b_2=2^2 \\ \quad\cdots\cdots \\ b_n-b_{n-1}=2^{n-1} \end{cases}$，将以上各式累加可得 $b_n-b_1=2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}$，

故 $b_n=2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}+b_1=\dfrac{2(1-2^{n-1})}{1-2}+2=2^n$，

又 $b_1=2$ 也满足上式，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $b_n=2^n$，即 $na_n=2^n$，故 $a_n=\dfrac{2^n}{n}$.

【变式 2】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且 $a_{n+1}-3a_n=2^n$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（本题不是 $a_{n+1}-a_n$ 这种结构，但可在 $a_{n+1}-3a_n=2^n$ 两端同除以 3^{n+1} 变为该结构）

因为 $a_{n+1}-3a_n=2^n$，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\dfrac{3a_n}{3^{n+1}}=\dfrac{2^n}{3^{n+1}}$，故 $\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{2}{3})^n$ ①，

（若将 $\dfrac{a_n}{3^n}$ 看成 b_n，则式①即为 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{2}{3})^n$，可用累加法先求 b_n）

令 $b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$，则 $b_1=\dfrac{a_1}{3}=\dfrac{1}{3}$，且 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{2}{3})^n$，

所以当 $n\ge 2$ 时，$b_2-b_1=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{2}{3})^1$，$b_3-b_2=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{2}{3})^2$，…，$b_n-b_{n-1}=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{2}{3})^{n-1}$，

各式累加得 $b_n-b_1=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{2}{3})^1+\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{2}{3})^2+\cdots+\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{2}{3})^{n-1}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\frac{2}{3}\times[1-(\frac{2}{3})^{n-1}]}{1-\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}-(\dfrac{2}{3})^n$，

所以 $b_n=\dfrac{2}{3}-(\dfrac{2}{3})^n+b_1=\dfrac{2}{3}-(\dfrac{2}{3})^n+\dfrac{1}{3}=1-(\dfrac{2}{3})^n$，又 $b_1=\dfrac{1}{3}$ 也满足上式，所以 $b_n=1-(\dfrac{2}{3})^n(n\in\mathbf{N}^*)$，

因为$b_n=\frac{a_n}{3^n}$，所以$\frac{a_n}{3^n}=1-(\frac{2}{3})^n$，故$a_n=3^n-2^n$.

【总结】像$a_{n+1}-a_n=f(n)$这类递推公式，可考虑用累加法求a_n．而对于$a_{n+1}-pa_n=f(n)(p\neq 0,p\neq 1)$这类结构，可两端同除以$p^{n+1}$，化为$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}-\frac{a_n}{p^n}=\frac{f(n)}{p^{n+1}}$，再用累加法求出$\left\{\frac{a_n}{p^n}\right\}$的通项，从而求得$a_n$.

类型Ⅱ：累乘法求通项

【例 2】已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=3(1+\frac{1}{n})a_n$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解：（将所给递推公式变形，即可得到$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$这种结构，故用累乘法求a_n）

因为$a_{n+1}=3(1+\frac{1}{n})a_n$，所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3\cdot\frac{n+1}{n}$，

故当$n\geq 2$时，$\frac{a_2}{a_1}=3\times\frac{2}{1}$，$\frac{a_3}{a_2}=3\times\frac{3}{2}$，$\frac{a_4}{a_3}=3\times\frac{4}{3}$，…，$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=3\cdot\frac{n-1}{n-2}$，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=3\cdot\frac{n}{n-1}$，

各式累乘得$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=3\times\frac{2}{1}\times 3\times\frac{3}{2}\times 3\times\frac{4}{3}\times\cdots\times 3\cdot\frac{n-1}{n-2}\times 3\cdot\frac{n}{n-1}$，化简得：$\frac{a_n}{a_1}=n\cdot 3^{n-1}$，

又$a_1=1$，所以$a_n=n\cdot 3^{n-1}$，而$a_1=1$也满足$a_n=n\cdot 3^{n-1}$，所以$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_n=n\cdot 3^{n-1}$.

【变式】在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$，则$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_{99}a_{100}=$______.

解析：本题给的是$\frac{a_{n+2}}{a_n}$，不是$\frac{a_{n+1}}{a_n}$，但结构相近，我们也试试用累乘法，看能得出什么结果，

由题意，$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$，所以当$n\geq 2$时，$\frac{a_3}{a_1}=\frac{2}{1}$，$\frac{a_4}{a_2}=\frac{3}{2}$，$\frac{a_5}{a_3}=\frac{4}{3}$，…，$\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=\frac{n}{n-1}$，

将以上各式累乘可得$\frac{a_3}{a_1}\cdot\frac{a_4}{a_2}\cdot\frac{a_5}{a_3}\cdots\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}$，所以$\frac{a_na_{n+1}}{a_1a_2}=n$，故$a_na_{n+1}=a_1a_2n=2n$，

又$a_1a_2=2$也满足上式，所以$a_na_{n+1}=2n$对任意的$n\in\mathbf{N}^*$都成立，

我们发现累乘后没有求出a_n，而是求出了a_na_{n+1}，而本题要求的恰好也就是数列$\{a_na_{n+1}\}$的前 99 项和，

所以$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_{99}a_{100}=2+4+6+\cdots+198=\frac{99\times(2+198)}{2}=9900$.

答案：9900

【总结】若给出$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$这类递推公式，可用累乘法求$\{a_n\}$的通项公式；若给出的是$\frac{a_{n+2}}{a_n}=f(n)$，则累乘后可以求得a_na_{n+1}的结果.

类型Ⅲ：带提示的构造法求通项

【例 3】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=1-\frac{1}{4a_n}$，设$b_n=\frac{2}{2a_n-1}$，证明$\{b_n\}$是等差数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解：（要证$\{b_n\}$是等差数列，只需证$b_{n+1}-b_n$为常数）由题意，$b_{n+1}-b_n=\frac{2}{2a_{n+1}-1}-\frac{2}{2a_n-1}$ ①，

（要进一步计算此式，可将递推公式代入，消去a_{n+1}再化简）又$a_{n+1}=1-\frac{1}{4a_n}$，代入式①可得

$$b_{n+1}-b_n=\frac{2}{2(1-\frac{1}{4a_n})-1}-\frac{2}{2a_n-1}=\frac{2}{1-\frac{1}{2a_n}}-\frac{2}{2a_n-1}=\frac{4a_n}{2a_n-1}-\frac{2}{2a_n-1}=\frac{4a_n-2}{2a_n-1}=2,$$

所以$\{b_n\}$是公差为 2 的等差数列，（只要再求出b_1，就能代等差数列通项公式求得b_n，进而求得a_n）

因为$a_1=1$，所以$b_1=\frac{2}{2a_1-1}=2$，故$b_n=2+(n-1)\times 2=2n$，即$\frac{2}{2a_n-1}=2n$，所以$a_n=\frac{n+1}{2n}$.

【变式】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n-1}}(n\ge 2)$，且$a_{n+1}>a_n$，证明$\left\{a_n^2+\frac{1}{a_n^2}\right\}$是等差数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解：（要证$\left\{a_n^2+\frac{1}{a_n^2}\right\}$是等差数列，只需证$a_n^2+\frac{1}{a_n^2}-(a_{n-1}^2+\frac{1}{a_{n-1}^2})$为常数，此式中$a_n$和$a_{n-1}$都平方了，但条件等式没有平方，为了凑出平方，先把所给递推公式中的a_n和a_{n-1}分离到等号两侧，再平方）

由题意，当$n\ge 2$时，$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n-1}}$，所以$a_n-\frac{1}{a_n}=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}$，从而$a_n^2+\frac{1}{a_n^2}-2=a_{n-1}^2+\frac{1}{a_{n-1}^2}+2$，

故$a_n^2+\frac{1}{a_n^2}-(a_{n-1}^2+\frac{1}{a_{n-1}^2})=4$，所以$\left\{a_n^2+\frac{1}{a_n^2}\right\}$是等差数列，公差为 4，（可由此先求出$a_n^2+\frac{1}{a_n^2}$，再求$a_n$）

又$a_1=1$，所以$a_1^2+\frac{1}{a_1^2}=2$，故$a_n^2+\frac{1}{a_n^2}=2+(n-1)\cdot 4=4n-2$，

（观察上式发现将右侧的-2移至左侧，可构成完全平方式，开根号即可降次）

所以$a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+2=4n$，即$(a_n+\frac{1}{a_n})^2=4n$，故$a_n+\frac{1}{a_n}=\pm 2\sqrt{n}$，

（取正还是取负？注意到题干$a_{n+1}>a_n$这个条件还没用，可由此判断$\{a_n\}$中的项的正负）

因为$a_1=1$，且$a_{n+1}>a_n$，所以$1=a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$ ①，

故$a_n+\frac{1}{a_n}=2\sqrt{n}$，整理得：$a_n^2-2\sqrt{n}a_n+1=0$ ②，（此式不易分解因式，可用求根公式求a_n）

由②可求得$a_n=\sqrt{n}\pm\sqrt{n-1}$，（该取哪个？可结合上面得到的不等式①来判断）

若$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$，则当$n\ge 2$时，$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}<1$，

与①矛盾，所以 $a_n=\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$.

【例 4】数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}-4a_n=2^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，证明 $\{a_n+2^n\}$ 是等比数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（要证 $\{a_n+2^n\}$ 是等比数列，只需证 $\dfrac{a_{n+1}+2^{n+1}}{a_n+2^n}$ 为常数，故将条件往 $a_{n+1}+2^{n+1}$ 和 a_n+2^n 凑）

因为 $a_{n+1}-4a_n=2^{n+1}$，所以 $a_{n+1}=4a_n+2^{n+1}$，故 $a_{n+1}+2^{n+1}=4a_n+2^{n+1}+2^{n+1}=4a_n+2^{n+2}=4(a_n+2^n)$ ①，

（不要急于将 a_n+2^n 除到左侧，需先说明数列 $\{a_n+2^n\}$ 的首项不为 0，否则该数列全为 0）

又 $a_1=2$，所以 $a_1+2^1=4\neq 0$，结合式①知数列 $\{a_n+2^n\}$ 的所有项均不为 0，故 $\dfrac{a_{n+1}+2^{n+1}}{a_n+2^n}=4$，

所以 $\{a_n+2^n\}$ 是首项和公比均为 4 的等比数列，从而 $a_n+2^n=4\times 4^{n-1}=4^n$，故 $a_n=4^n-2^n$.

【反思】在证明 $\{b_n\}$ 为等比数列时，得到 $b_{n+1}=qb_n$ 后，还需验证 $b_1\neq 0$，请注意此细节.

【变式】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=x$，其中 $x\in\mathbf{R}$，且 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n-n+1$. 记 $b_n=a_{n+1}-a_n-n$，数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列？说明理由.

解：（要看 $\{b_n\}$ 是否为等比数列，就看是否满足 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ 为常数，可由所给递推式建立 b_{n+1} 与 b_n 的关系）

因为 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n-n+1$，所以 $b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}-n-1=(3a_{n+1}-2a_n-n+1)-a_{n+1}-n-1$

$=2(a_{n+1}-a_n-n)=2b_n$ ①，（有了 $b_{n+1}=2b_n$，只需再看 b_1 是否为 0，就能确定 $\{b_n\}$ 是否为等比数列了）

因为 $a_1=1$，$a_2=x$，所以 $b_1=a_2-a_1-1=x-1-1=x-2$，

当 $x=2$ 时，$b_1=0$，所以数列 $\{b_n\}$ 不是等比数列；

当 $x\neq 2$ 时，$b_1\neq 0$，结合式①可得 $\{b_n\}$ 所有项均不为 0，所以式①可变形成 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$，

故 $\{b_n\}$ 是首项为 $x-2$，公比为 2 的等比数列.

【总结】上面两道例题及变式都是让我们先证等差、等比数列，再求通项 a_n. 这类题可根据结论的提示对所给递推公式变形. 而有些题没有提示，这就需要我们自己用待定系数法构造新数列，如下面的类型Ⅳ.

类型Ⅳ：待定系数法构造

【例 5】数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_{n+1}=-a_n+2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（本题未提示如何构造，可用待定系数法发掘，注意到递推式中除 a_{n+1} 和 a_n，余下的为关于 n 的一次函数，这种结构的前后项可设为 $An+B$ 和 $A(n+1)+B$，故设 $a_{n+1}+A(n+1)+B=-(a_n+An+B)$，即 $a_{n+1}=-a_n-2An-A-2B$，与 $a_{n+1}=-a_n+2n+1$ 对比可得 $\begin{cases}-2A=2\\-A-2B=1\end{cases}$，解得：$\begin{cases}A=-1\\B=0\end{cases}$）

因为 $a_{n+1}=-a_n+2n+1$，所以 $a_{n+1}-(n+1)=-a_n+2n+1-(n+1)=-a_n+n=-(a_n-n)$ ①，

（此时还不能下结论 $\{a_n-n\}$ 为等比数列，需验证其首项不为 0）

又 $a_1=2$，所以 $a_1-1=1\neq 0$，结合式①可知数列 $\{a_n-n\}$ 的所有项均不为 0，故 $\dfrac{a_{n+1}-(n+1)}{a_n-n}=-1$，

所以 $\{a_n-n\}$ 是首项为 1，公比为 -1 的等比数列，从而 $a_n-n=(-1)^{n-1}$，故 $a_n=n+(-1)^{n-1}$.

【例 6】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2^n(n\in\mathbf{N}^*)$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（本节已经给出了本题的累加法解法，其实也能用待定系数法构造，注意到递推公式中除了 a_{n+1} 和 a_n，余下的为 2^n，这种结构的前后项可设为 $A\cdot 2^n$ 和 $A\cdot 2^{n+1}$，故可设 $a_{n+1}+A\cdot 2^{n+1}=3(a_n+A\cdot 2^n)$，整理得：$a_{n+1}=3a_n+A\cdot 2^n$，与 $a_{n+1}=3a_n+2^n$ 对比可得 $A=1$）

因为 $a_{n+1}=3a_n+2^n$，所以 $a_{n+1}+2^{n+1}=3a_n+2^n+2^{n+1}=3a_n+3\times 2^n=3(a_n+2^n)$，

又 $a_1=1$，所以 $\{a_n+2^n\}$ 是首项 $a_1+2^1=3$，公比为 3 的等比数列，从而 $a_n+2^n=3^n$，故 $a_n=3^n-2^n$.

【总结】对于构造法求通项，高考的要求较低，需要我们自行构造的，一般不复杂，其核心是将递推式中除了 a_{n+1} 和 a_n 的其余部分也化成前后项，并分配给 a_n 和 a_{n+1}，这一过程常用待定系数法来完成.

类型Ⅴ：等价变形求通项

【例 7】已知各项都为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_n^2-(2a_{n+1}-1)a_n-2a_{n+1}=0$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（所给递推公式结构较复杂，但观察发现若将次数相同的放一起，可因式分解）

$a_n^2-(2a_{n+1}-1)a_n-2a_{n+1}=a_n^2-2a_{n+1}a_n+a_n-2a_{n+1}=a_n(a_n-2a_{n+1})+a_n-2a_{n+1}=(a_n-2a_{n+1})(a_n+1)=0$ ①，

因为数列 $\{a_n\}$ 各项都为正数，所以 $a_n+1>0$，从而式①可化为 $a_n-2a_{n+1}=0$，故 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列，故 $a_n=(\dfrac{1}{2})^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

【反思】当递推公式较复杂时，可先对递推公式变形，将其化简，因式分解是可以考虑的方向.

【例 8】数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=1$，且 $na_{n+1}-(n+1)a_n=1(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_n=$______.

解析：观察递推公式，若 a_{n+1} 和 $n+1$ 组合，a_n 和 n 组合，则能构造前后项关系，可两端同除 $n(n+1)$ 实现，

因为 $na_{n+1}-(n+1)a_n=1$，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ ①，

把 $\dfrac{a_n}{n}$ 整体看作一个新数列，可用累加法先求出其通项，进而得到 a_n，

设 $b_n=\dfrac{a_n}{n}$，则 $b_1=\dfrac{a_1}{1}=1$，且式①即为 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}$，所以当 $n\geq 2$ 时，

$b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-b_1)+b_1=-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n-2}-\cdots-\dfrac{1}{2}+1+1=2-\dfrac{1}{n}$，

又 $b_1=1$ 也满足上式，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $b_n=2-\frac{1}{n}$，即 $\frac{a_n}{n}=2-\frac{1}{n}$，故 $a_n=2n-1$.

答案： $2n-1$

【反思】像大下标对应小系数，小下标对应大系数这种“系数交叉模型”，常通过除以系数构造新数列.

【变式】数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=\frac{1}{3}$，$2a_{n+1}a_n+a_{n+1}-a_n=0$，则 $\{a_n\}$ 的通项公式为______.

解析：为了把递推式中的 $a_{n+1}a_n$ 分开，两端同除以 $a_{n+1}a_n$，严谨考虑，先判断 a_n 能否为 0，

由 $2a_{n+1}a_n+a_{n+1}-a_n=0$ 可得 $a_{n+1}(2a_n+1)=a_n$，又 $a_1=\frac{1}{3}>0$，结合 $a_2(2a_1+1)=a_1$ 得 $a_2=\frac{a_1}{2a_1+1}>0$，

同理，由 $a_2>0$ 可得 $a_3=\frac{a_2}{2a_2+1}>0$，由 $a_3>0$ 可得 $a_4=\frac{a_3}{2a_3+1}>0$，…，所以 $\{a_n\}$ 为正项数列，

故在 $2a_{n+1}a_n+a_{n+1}-a_n=0$ 两端同除以 $a_{n+1}a_n$ 可得 $2+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=0$，所以 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$，

故 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是公差为 2 的等差数列，又 $\frac{1}{a_1}=3$，所以 $\frac{1}{a_n}=3+(n-1)\times 2=2n+1$，故 $a_n=\frac{1}{2n+1}$.

答案： $\frac{1}{2n+1}$

【反思】遇到含 a_na_{n+1} 这种结构的递推公式，一种常见的变形思路是同除以 a_na_{n+1}.

【总结】若题干给出的递推公式较复杂，则可对递推公式变形，化简递推公式，或构造出新数列来求通项，这类题往往变形并不复杂，常见的方法有因式分解、同除系数或某一项等.

强化训练

1.（2022•上海模拟•★★）在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_n=a_{n-1}+\lg\frac{n}{n-1}(n\geq 2)$，则 $a_{100}=$______.

2.（2022•长春模拟•★★）已知数列 a_1，$\frac{a_2}{a_1}$，$\frac{a_3}{a_2}$，…，$\frac{a_{n+1}}{a_n}$，…是首项为 1，公比为 2 的等比数列，则下列数中是数列 $\{a_n\}$ 中的项的是（　　）

（A）16　（B）128　（C）32　（D）64

3.（★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=2$，且 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列. 证明：$\{a_n+n\}$ 是等比数列，并求 a_n.

4．（2022·全国模拟·★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$，$a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{3}{2}$．证明数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列，并求$\{a_n\}$的通项公式.

5．（2022·酒泉模拟·★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$．设$b_n=\frac{1}{a_n-1}$，证明$\{b_n\}$是等差数列，并求$\{a_n\}$的通项公式.

6．（2023·全国模拟·★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}-2a_n=3^n$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

7．（2023·河北模拟·★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$，$a_{n+1}=2a_n+n$，若$b_n=2^n-a_n$，求$\frac{b_n-1}{(b_n+1)^2}$的最大值.

8．（★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$(2n-1)a_{n+1}-(2n+1)a_n=2$，求$a_n$.

9．（2022·全国模拟·★★★★）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$(n^2+1)a_{n+1}=2(n^2-2n+2)a_n$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

10.（2023·安徽模拟·★★★★）已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且$a_n(a_{n+1}-a_n)-3a_n+2a_{n+1}-2=0$，求$\{a_n\}$的通项公式.

11.（2023·福建质检·★★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=8$，$a_{2n-1}+a_{2n+1}=\log_2 a_{2n}$，$a_{2n}a_{2n+2}=16^{a_{2n+1}}$，证明：$\{a_{2n-1}\}$是等差数列.